INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 3: TFC e Integral por sustitución

1. Sea $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x = 0 \in I$. Calcular el siguiente límite: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \int_2^{2+x} \frac{\sqrt{1+t^3}}{x}\, dt$.

   Sugerencia: Utiliza el TFC y recuerda que $F'(0) = \displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$.

2. Considera que $f(1) = 10$ y que la gráfica de la Fig. 1 es la derivada de f. Encuentra el valor de $f(2)$ y de $f(3)$.

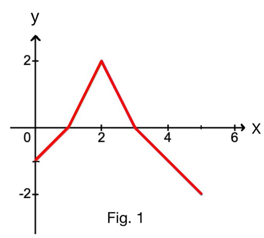

Fig. 1

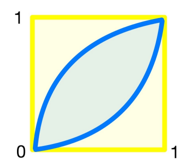

Fig. 2

3. Una fábrica de azulejos tiene el diseño de la figura Fig. 2, donde el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ representa el azulejo, la parte sombreada entre las curvas $x^{\frac{1}{3}}$ y x^3 está pintada de azul y el resto de amarillo.

   a) ¿Se requiere más azul o más amarillo?

   b) ¿En qué proporción?

4. Muestra que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ con $a < b$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   a) $\displaystyle \int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda) dx.$ *b*) $\displaystyle \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx.$

5. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua. Considera la función $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, f\left(\frac{t^2+1}{t}\right) dt.$$

   Usando el método de sustitución en la integral definida, prueba que $H(1/x) + H(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. (**No derivar**.)

6. Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y f continua en $[0, a]$.

   a) Usa la sustitución $u = a - x$ para demostrar que $\displaystyle \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\, dx = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u) + f(a-u)}\, du.$

b) Usa la parte (a) para demostrar que $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$.

(¡Nótese que el valor de la integral no depende de f!)

c) Usa la parte (b) para obtener el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}\,dx$.

7. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y $h(x) = x^2 \displaystyle\int_{g(x^3)}^{g(x)} f(t)\,dt$.

   a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.

Lagartijas para practicar (en particular, los ejercicios en azul)

Derivar y simplificar :

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos^7(w^{\frac{1}{2}})\,dw.$

b) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2+3} u(12-u)\,du.$

c) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \operatorname{sen}^4(z)\,dz + \int_4^x \cos^3(z^2)\,dz.$

d) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^7} x^4\,dt + \int_{2x^5}^1 t^6\,dt.$

e) $F(x) = \displaystyle\int_0^x 5x^3\csc^7(r^4)\,dr.$

f) $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^9 4x^2\operatorname{sen}^5(y^3)\,dy.$

g) $F(x) = \dfrac{\displaystyle\int_{4x+1}^{5x-1} \sqrt{u^5+3}\,du}{x^2+18}.$

h) $F(x) = \dfrac{10}{\displaystyle\int_4^{5x^2+1} 8\tan^4(v^5)\,dv}.$

i) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\int_2^x 2\cos^5(t^4)\,dt} \frac{1}{1+t^{20}+\cos^{18}(t)}\,dt.$

Cazuelazo semanal.

- Sea $\overline{f}(a,b)$ el promedio de la función f en $[a,b]\subset\mathbb{R}$ dado por

  $$\overline{f}(a,b) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx\,.$$

  Prueba que $\overline{(\alpha f+\beta g)}(a,b) = \alpha\overline{f}(a,b) + \beta\overline{g}(a,b)$ para todas $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

- Para toda $\lambda\in(a,b)$, encuentra el valor de $0<\mu<1$ en términos de a, b y λ de tal modo que

  $$\overline{f}(a,b) = \mu\overline{f}(a,\lambda) + (1-\mu)\overline{f}(\lambda,b)\,.$$

  (Nota: esta fórmula se conoce como combinación convexa.)