

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 4: Integral por sustitución y logaritmo natural

La primera página es de lagartijas para practicar, al menos resuelve los ejercicios en azul.

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\csc(x)},$

d) $\int_{\pi/3}^{\pi} \sin |\pi - 3x| dx,$

g) $\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^3 + 3}} dt, \text{ con } x \geq 1,$

b) $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx} \cos^{2025}(x) \right) dx,$

e) $\int_1^7 \frac{5t}{\sqrt{1+t}} dt,$

h) $\int_0^{\pi/2} \frac{5 \sin(x) \cos(x)}{(1 + \sin^2(x))^2} dx,$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x \sqrt{2x-3} dx,$

f) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{2 \cos(2\theta)}{\sin^3(2\theta)} d\theta,$

i) $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt, \text{ con } x \geq 0.$

2. Derivar.

a) $f(x) = \frac{2x^3}{\ln(x)} + \ln\left(\frac{4}{x^2}\right),$

b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^4 + 5}{\cos(x)}},$

c) $f(x) = \int_0^x \ln(3-x) \left(\frac{3+t^6}{t^5+7} \right) dt.$

3. Derivar usando derivación logarítmica:

a) $f(x) = (\sqrt{x})^{x^x}.$

b) $h(x) = x^{\sqrt{x}} x^{\ln(x)}, \quad x > 0.$

c) $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{(x^2 + 1)^{5/2} \sqrt{2 + \sin(x)}}.$

4. Determina las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{dx}{\cos^2(x) [2 + \tan(x)]^5},$

d) $\int (z^5 + 4z^2)(z^3 + 1)^{12} dz,$

g) $\int \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + 5})}{\sqrt{x^2 + 5}} dx,$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx,$

e) $\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx,$

h) $\int [1 + \ln(x)] \cot(x \ln(x)) dx,$

c) $\int \frac{\cos(x) \sin(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}} dx,$

f) $\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3 - 1}} dx,$

i) $\int \frac{1}{x + x \sin(\ln(x))} dx.$

5. Halla TODAS las funciones diferenciables f que satisfacen la ecuación

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{uf(u)}{5+u^2} du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

6. Sea $f(x) = \int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{1+t} dt$, con $x > 0$. Demuestra que $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln(x))^3}{3}$.

Sugerencia: En $f\left(\frac{1}{x}\right)$ hacer el cambio de variable $u = \frac{1}{t}$. Después usar propiedades de la integral para resolver $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$.

7. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\sin(t)}{1 + f(\sqrt{t})} dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(Examen Dep.1, 2024-O)

Cazuelazo semanal.

■ Demuestra que la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{x}{n}\right) + \sin\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) \right], & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es continua en todo su dominio.