INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 5: Funciones inversas y exponencial natural

1. Encuentra el dominio, imagen y la función inversa de las siguientes funciones:

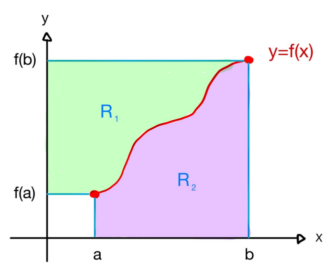
   a) $f(x) = -8x^3 - 2$,
   b) $g(x) = \sqrt{x+2}$,
   c) $h(x) = \dfrac{3x+5}{x-4}$,
   d) $i(x) = \ln(5-3x)$.

2. Sea f una función invertible, con inversa f^{-1} y sea $g = \dfrac{1}{f^{-1}}$. Si $f(2) = -3$ y $f'(2) = \dfrac{2}{3}$, encuentra $g'(-3)$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3e^{7x} + \displaystyle\int_0^x \sqrt{9 + 2t^4 + t^6}\, dt$.

   a) Justifica que f es diferenciable en su dominio.
   b) Demuestra que f posee una inversa f^{-1} en $\mathbb{R}$.
   c) Encuentra $(f^{-1})'(3)$.

4. Sea $0 \leq a < b$ y f no negativa, creciente y continua en $[a, b]$ de modo que f^{-1} existe. Ver la gráfica.



   a) Sean A_1 y A_2 respectivamente las áreas de R_1 y R_2. Muestra que $A_1 + A_2 = bf(b) - af(a)$.
   b) Usa el inciso anterior para mostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\, dy$.

5. Muestra que $5e^x + 2e^{-x} = 3$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

6. Encuentra x, si $\dfrac{3e^{-x} - 2e^x}{5} = 1$.

7. Analiza la diferenciabilidad de las siguientes funciones. Derivar y simplificar:

a) $f(x) = \displaystyle\int_1^{e^{(x^2)}} \ln\left(\sqrt{t}\right)\, dt,$

b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{5\ln(x)} e^{2x} \ln\left(e^t + e^{-t}\right) dt, \ x > 0.$

8. Integrar:

a) $\displaystyle\int_{-\ln(3)}^{0} \sqrt{e^x}\, dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{\tan(e^{-3x})}{e^{3x}}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+1}\, dx,$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1-e^x}\, dx,$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2t}-2}{e^{2t}+3}\, dt,$

f) $\displaystyle\int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi/3)} e^w \tan(e^w)\, dw.$

Cazuelazo semanal.

- Sea f una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Prueba que para toda función que satisface la ecuación $f'(x) = rf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y con $r \in \mathbb{R}$, existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ke^{rx}$ en todo $\mathbb{R}$.

- Muestra la Desigualdad de Jordan, es decir, se satisface: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\,\mathrm{sen}(x)}\, dx < \frac{\pi}{2R}$, para toda $R > 0$.

  Ayuda: muestra primero que $\mathrm{sen}(x) \geq \dfrac{2x}{\pi}$ para toda $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.